Lycée M^{ed} Reda Sloaui
Centre des classes préparatoire
Agadir
Année scolaire : 2004/2005

Devoir libre $n°3$
à rendre le 3/1/2005

Exercice 1

Nous considérons la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathcal{E}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x}. \qquad (1)$$

de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans Oxy.

1. Etude et réprésentation de f.
   - a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f au point $x = 0$
   - b) Calculer f' et f''.
   - c) Etudier les variations de f et représenter $\mathcal{C}_f$. (On jusfiera les limites de$f$ en $\pm\infty$)
2. Etude de $f^{(n)}$
   - a) Dire pourquoi f est classe C^∞ sur tout intervalle ouvert de $\mathcal{C}_f$.
   - b) Etablir par récurrence que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x)^{n+1}}e^x$ où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n dont on déterminera le monôme de plus haut degré.
     Déduire de la démonstration précédente la relation (pour $n \geq 1$),
     $$P_n(x) = (-x+n+1)P_{n-1}(x) + (1-x)P'_{n-1}(x).$$
   - c) Calculer $P_n(1)$.
3.
   - a) Etablir que pour $x \in \mathcal{E}_f$
     $$(x-1)f'(x) - (x-2)f(x) = 0. \qquad (2)$$
   - b) En appliquant la formule de Leibniz à (2) et en utilisant la forme (1), donner une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_{n-1}.
   - c) Déduire que pour $x \in \mathcal{E}_f$
     $$P'_n(x) = -nP_{n-1}(x)$$
     puis pour $0 \leq k \leq n$, que
     $$P_n^k(1) = (-1)^k n!$$
4. Enoncer et appliquer la formule de Taylor pour le polynôme P_n entre 1 et x.
   En déduire que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{P_n(x)}{n!} = e^{1-x}$

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$, pour un entier $n > 1$ (0 désigne l'endomorphisme nul de E).

Montrer que si x est un vecteur de E n'appartenant pas au noyau de f^{n-1}, les vecteurs $x, f(x), ..., f^{n-1}(x)$ sont linéairement indépendants.

Exercice 3

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On considère l'application φ de E dans E définie par :

$$(\forall P \in E) : \varphi(P) = x^2 P'' - (a+b-1)xP' + abP$$

où a et b sont deux entiers naturels vérifiant $0 \leq a < b \leq n$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Calculer
$$\varphi(x^p), (0 \leq p \leq n)$$
3. Déterminer l'image de E par φ et le noyau de φ.

Exercice 4

E_1 et E_2 étant deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E, on considère l'application f de $E_1 \times E_2$ dans E définie par

$$f(x_1, x_3) = x_1 + x_2$$

$(x_1 \in E_1, x_2 \in E_2)$

1. Démontrer que f est linéaire.
2. Démontrer que $\ker f$ est décrit par $(x, -x)$, x décrivant $E_1 \cap E_2$ en déduire que $\ker f$ est isomorphe à $E_1 \cap E_2$.
3. Démontrer que $Imf = E_1 \cap E_2$, en déduire :

$$\dim E_1 + E_2) = \dim(E_1 \cap E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$$

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Démontrer que
$$E = Imf \oplus \ker f \Longleftrightarrow Imf = Imf^2 \qquad (1)$$
2. Donner un exemple d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, vérifiant (1).

****